数理解析研究所講究録
694巻 1989年 74-97

双対共鳴模型のK.-P.系の解による実現

日大・文理　鈴木　理　(Osamu Suzuki)

(要約) D.R.模型の頂点作用素はK.-P.系のそれと同じものと考えられる。この事をもとにしてD.R.模型を$\mathbb{C}^*$上のフェルミ場に相互作用するボゾンとして実現する。この実現は或る種のクリフォード群の元((3.24))をボーズ・フェルミ対応によりボゾンと考えて真空期待値をとるとKoba-Nilsenの式となること，他方同じ元をフェルミ場として真空期待値をとりK.-P.系の解を作るとフェルミ場の間の相互作用を与えることを示すことによりなされる。

序：Koba-Nilsenの式

ここでは序としてKoba-Nilsenの式についてのべ，本稿でとりあつかう問題について説明する。

1968年に強い相互作用をあらわす散乱振幅の式としてVenezianoの式([1])というものが提案された。これは強

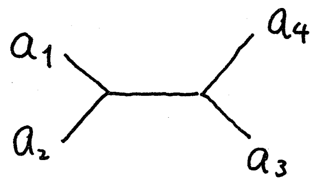
い相互作用の理論に波紋を投げかけたようである。実際に翌年にKoba-Nilsenの式というものがあらわれ，ただちにN-点相互作用に拡張され，1970年には この力学模型として双対共鳴模型がFubini-Venezianoにより考察された（[2]，[4]）。又南部-Suskindによりこれが弦模型として理解されることが示されるとクォーク理論との関係が問題にされて多くの人々をひきつけることとなった（[3]）。これらのゆきさつ及びその後の量子化，アノーマリの理論については数多く出版されているサーベイを参照されたい（例えば[5]，[6]，etc…）。本稿でとり上げられる弦模型はごく初期の所でありそれからの展開についてはのべない。

本稿では双対共鳴模型を$\mathbb{C}^*$上のフェルミ場に相互作用するボゾンとして実現することを考える。今までにとりあつかわれたのは散乱振幅のみであり，相互作用のラグランジュ形式等はとり上げられなかった様に思える。ここでは双対共鳴模型の頂点作用素とK.-P.系のそれとが極めてよく似ていることに着目して，K.-P.系の特別な解として双対共鳴模型がえられることを示す。又K.-P.系の解はゲージ接続をなすことから，ラグランジュ形式に相当するものも求めることができることをのべる（[10]）。双対共鳴模型を含む より一般な共形的場の理論をK.-P.系を用いてより一般なリーマン面上の

場として実現する方法も得られている([7])。本稿で与えられる考察はこれらのより一般な理論の理解の助けとなるであろう。

以上のまえおきのあとで本稿でとりあつかわれる問題点を述べることにする。まず発端となったVenezianoの式について説明する。Venezianoは4点相互作用の散乱振幅と予想される式を天下り式に与えた。次の図式に対応する相互作用を考える。

(1-1)



$$\Leftrightarrow \quad a_1 + a_2 \longrightarrow a_3 + a_4$$

これは粒子a_1, a_2が相互作用して粒子a_3とa_4を生じると考えるものである。各々の運動量をp_i $(i=1.2.3.4)$とし,

$$(1\text{-}2) \qquad s = (p_1 + p_2)^2 \qquad t = (p_2 + p_3)^2$$

とおきMandelstam変数という。ここでは粒子は一次元空間上のスカラー場と考える。一次式

$$(1\text{-}3) \qquad \alpha(s) = \alpha'(0)s + \alpha(0)$$

を考え, 次の式を<u>Veneziano振幅</u>という:

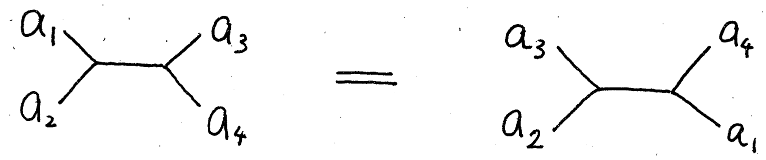
$$(1-4)\qquad \begin{aligned} f(s,t) &= B(-\alpha(s), -\alpha(t)) \\ &= \int_0^1 x^{-\alpha(s)-1}(1-x)^{-\alpha(t)-1}dx. \end{aligned}$$

上の積分は $\mathrm{Re}(\alpha(s))<0$, $\mathrm{Re}(\alpha(t))<0$ の所でのみ有限確定な値をもつが, 解析接続して $\mathbb{C}^2$ 全体の有理型関数として考えるものとする。これだけでは単にベータ関数を与えているにすぎないが, Venezianoはこの式が物理的要請をよく満足していることを示した。これについてふれる:

(1) <u>Regge極</u> : 相互作用によりある共鳴粒子が生じると, 内部量子数は同じであるがスピンの異った粒子も同時に生じて相互作用することが知られている。このとき質量Mとスピン J との間に $J=\alpha(0)+\alpha'(0)M^2\ (=\alpha(M^2))$ という関係がある。これをReggeの軌跡という。Regge極というのは散乱振幅に(1位の)極としてあらわれるからである。

(2) <u>Reggeの振い</u> : 散乱振幅の $s\to\infty$ (t: fix)(或は $t\to\infty$ (s; fix))に於ける振いをいう。$|f(s,t)|\sim t^{\beta(s)}$ ($s\approx\infty$) という多項式型のふるまいをもつことが知られている。これをReggeの振いという。

(3) <u>s-t 交叉性</u> : 次の2通りの相互作用は同等とみなさなくてはならないという原則をいう。

(1-5) 

以上の3つの規則は理論的なものではなくて実験的なものの様である（[8]を参照せよ）。Venezianoはこれらの性質を次の事柄を用いて示している：

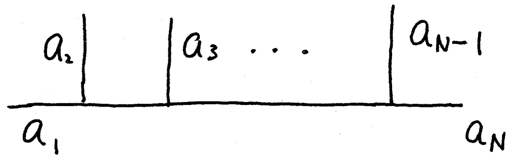
(1-6)

(i) $B(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$

(ii) $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z$

(iii) $\Gamma(z+1)\sim\sqrt{2\pi}\,z^{z+\frac{1}{2}}e^{-z}\quad(z\fallingdotseq\infty)$

Venezianoの式をN-点相互作用に拡張したものをKo-ba-Nilsenの式という。次の相互作用を考える：

(1-7) 

前と同様に各粒子の運動量を p_i $(i=1,2,\cdots,N)$ としてMan-delstam変数を $s_{ij}=(p_i+p_{i+1}+\cdots+p_j)^2$ $(i<j)$ $s_i=(p_0+p_1+\cdots+p_i)^2$ とし $\alpha_{ij}=\alpha(s_{ij})$ とおき, $\alpha_i=\alpha(s_i)$ とおく。Koba-Nilsenの式は

$$(1\text{-}8)\qquad B^{(N)}=\int_0^1\cdots\int_0^1\prod_{i=1}^{N-3}dx_i\,x_i^{A_i}(1-x_i)^{B_i}\prod_{i<j}(1-x_i\cdots x_j)^{C_i}$$

とあらわされる。ここで A_i, B_j, C_k 達は α_{ij}, α_j の一次結合であらわされる定数である。最も重要な項は最も右側の項である。

次に重要になるのは散乱振幅を実現する力学系を定める事柄である。これに答えるのが Fubini-Veneziano による双対共鳴模型である。彼らは量子化された場の演算子として

(1-9) $$Q(z) = a_0 + i a_0^+ \log z + \sum_{n>0} \frac{a_n^+}{\sqrt{n}} z^n + \sum_{n>0} \frac{a_n}{\sqrt{n}} z^{-n}$$

を導入している，ここで $[a_0, a_0^+] = i$, $[a_n, a_m] = \delta_{nm}$ $(m, n \in \mathbb{N})$，他は互いに可換なボーズ場であり $z \in \mathbb{C}^*$ である。上の $Q(z)$ を用いて<u>頂点作用素</u>を

(1-10) $$V(\alpha, z) = :e^{i\alpha Q(z)}:$$

により定めるとこれらの有限個の積の真空期待値をとると，

(1-11) $$\langle\langle 0 | V(\alpha_1, \rho_1) V(\alpha_2, \rho_2) \cdots V(\alpha_N, \rho_N) | 0 \rangle\rangle = \prod_{i<j} (1 - x_i x_{i+1} \cdots x_j)^{\alpha_i \alpha_j}$$

がなりたつことを示している，ここで $\rho_i = x_i x_{i+1} \cdots x_{n-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$，$\rho_n = 1$ である。

以上が本稿でとりあつかわれるテーマの物理的背景である。ここでは次の２つの問題がとりあつかわれる：

[問題Ⅰ]　波動関数$Q(z)$を(1-9)と定める数学的な根拠は何か？

[問題Ⅱ]　Koba-Nilsenの式を実現するラグランジュ形式は何か？

§2に於いて$sl(2,\mathbb{C})$の表現空間になりうるボーズ場という立場で$Q(z)$が得られることを示し，§3でK.-P.系の解により双対共鳴模型がえられることよりこの実現をとりあつかう。

§2.　$sl(2,\mathbb{C})$の表現とボーズ場

ここではまず縮退のない場という概念を導入し，$sl(2,\mathbb{C})$の表現から縮退のない場を作る方法をのべる。次にボーズ場としての第二量子化を考えるが，$sl(2,\mathbb{C})$の表現空間になりうるボーズ場はつよい制限をうける。これより，唯1つ可能なものが(1-9)の波動関数を与えることを示す。

縮退のない場を定める。$\mathbb{H}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{H}_n$を線形空間$\mathbb{H}_n$の直和とし，演算子の列$\alpha_n^+$, α_n $(n\in\mathbb{Z})$を考える：

$$(2\text{-}1)\qquad \alpha_n^+:\mathbb{H}_n\longrightarrow\mathbb{H}_{n+1},\quad \alpha_n:\mathbb{H}_n\longrightarrow\mathbb{H}_{n-1}.$$

α_n^+ を生成演算子といい，α_n を消滅演算子という。(2-1) を $\alpha^+ : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $\alpha : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ と略記することにする。α^+ と α から生成される代数を $\mathfrak{A}$ とかく。$\xi_0 \in \mathbb{H}_0$ をとり $\xi = (\cdots 0, 0, \xi_0, 0, 0, \cdots) \in \mathbb{H}$ とおき ξ を基本ベクトルとするフォック空間を

$$(2\text{-}2) \qquad \mathfrak{F}(\xi) = \{ x\xi : x \in \mathfrak{A} \},$$

と定める。$\mathfrak{F}_n(\xi) = \mathbb{H}_n \cap \mathfrak{F}(\xi)$ とおき n-粒子系という。以下 $\mathfrak{F}(\xi)$, $\mathfrak{F}_n(\xi)$ を $\mathbb{C}$-ベクトル空間と考えることにする。

定義 (2-3) (i) $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{F}_n(\xi) \leqq 1$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$ となるとき，$\mathfrak{F}(\xi)$ を縮退のないフォック空間という。(ii) $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{F}_n(\xi) \leqq 1$ $(n \in \mathbb{Z})$ となるとき完全に縮退のないフォック空間という。

以下 $\psi_n = \alpha^{+n}\xi$, $\psi_{-n} = \alpha^n \xi$ $(n \in \mathbb{N})$ とおくことにする。$\mathfrak{F}(\xi)$ が縮退がないとき，

$$(2\text{-}4) \qquad \mathfrak{F}(\xi) = \mathfrak{F}_0(\xi) \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}^*} \mathbb{C}\psi_n$$

となる。このとき，$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{F}_0(\xi) \leqq 3$ であり，$\alpha^+\alpha\xi$, $\alpha\alpha^+\xi$, ξ が基底になりうる。

次に $sl(2, \mathbb{C})$ の表現から縮退のない場を作ろう。$sl(2, \mathbb{C})$

の基底を

$$(2-5)\qquad l_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ l_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ l_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

にとることにする。次に線形表現 $\rho : sl(2,\mathbb{C}) \times V \longrightarrow V$ が与えられているとする。(2-5)の ρ による像を $\hat{l}_+, \hat{l}_-, \hat{l}_3$ とおくと.

$$(2-6)\qquad [\hat{l}_+, \hat{l}_-] = -\hat{l}_3,\ [\hat{l}_-, \hat{l}_3] = 2\hat{l}_-,\ [\hat{l}_+, \hat{l}_3] = -2\hat{l}_+$$

となる。これより, ψ を $\hat{l}_3$ の固有値 λ に対する固有ベクトルとすると, $\psi_+ = \hat{l}_+\psi$, $\psi_- = \hat{l}_-\psi$ は

$$(2-7)\qquad \hat{l}_3\psi_+ = (\lambda+2)\psi_+,\quad \hat{l}_3\psi_- = (\lambda-2)\psi_-$$

となることが分かる。そこで ξ_0 を $\psi_1 = \hat{l}_+\xi_0$, $\psi_{-1} = \hat{l}_-\xi_0$ が $\hat{l}_3$ の固有ベクトルになる様にとるなら, $\psi_n = \hat{l}_+^{\,n}\xi_0$, $\psi_{-n} = \hat{l}_-^{\,n}\xi_0$ は $\hat{l}_3$ の固有ベクトルになる。このとき, ξ_0 は一般に $\hat{l}_3$ の固有ベクトルとは限らないことに注意する。これより. $\hat{l}_+, \hat{l}_-$ を生成, 消滅演算子とする縮退のな( )フォック空間がえられる:

$$(2.-8)\qquad \begin{cases} \mathcal{F}(\xi) = \mathbb{C}\xi_0 \oplus_{n\in\mathbb{Z}^*} \mathbb{C}\psi_n & (\xi_0 : \hat{l}_3\text{の固有ベクトル}) \\ \mathcal{F}(\xi) = \mathbb{C}\xi_0 + \mathbb{C}\hat{l}_-\hat{l}_+\xi_0 \oplus_{n\in\mathbb{Z}^*} \mathbb{C}\psi_n & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

次に上の場に対して第二量子化を定めることにする。通例おこなう様に $\hat{\ell}_+^n \Longleftrightarrow a_n^+$, $\hat{\ell}_-^n \Longleftrightarrow a_n$ とおきかえて，(2-8)に対して各々

$$
(2\text{-}9)\quad
\begin{aligned}
\psi &= \sum_{n>0} a_n^+ \psi_n + \sum_{n>0} a_n \psi_{-n} \\
\psi &= a_0 \xi_0 + a_0^+ \xi_0' + \sum_{n>0} a_n^+ \psi_n + \sum_{n>0} a_n \psi_{-n}
\end{aligned}
$$

と定めることにする。$\{a_n, a_n^+\}$ はボゾンとして第二量子化するかフェルミ場として第二量子化するかによって $[a_n, a_m^+]_\pm = \delta_{nm}$ をとるものとする。

次に表現を具体的に与えて縮退のない場を求めてみる。Vとして$\mathbb{C}^*$上の(多価)正則関数の作る関数空間をとり，ここに$SL(2,\mathbb{C})$の正則表現を考える。以下

$$
(2\text{-}10)\quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}) \Longleftrightarrow z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d} \; (= gz)
$$

として，表現

$$
(2\text{-}11)\quad U : f(z) \longrightarrow f(g^{-1}z)
$$

を考える。この微分表現を ρ_0 とする。(2-5)のρ_0による像を $\hat{\ell}_+, \hat{\ell}_-, \hat{\ell}_3$ とかくと，

(2-12) $\hat{l}_+ = z^2\frac{d}{dz}$, $\hat{l}_- = -\frac{d}{dz}$ $\hat{l}_3 = -2z\frac{d}{dz}$

となる。縮退のない場を求めるために，固有値問題

(2-13) $\frac{1}{2}\hat{l}_3\psi = \lambda\psi$

を考える。この解は $\psi = c\,z^{\lambda}$ (c ; 定数)となるから，λ により縮退のないフォック空間は次の様に分れる：

(i) $\lambda \notin \mathbb{Z}$ のとき，このとき，完全に縮退をもたない場となり

(2-14) $\mathcal{F}(\xi_0) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}\,z^{n+\lambda}$ ($\xi_0 = z^{\lambda}$)

となる。(ii) $\lambda \in \mathbb{Z}$ のとき

(2-15) $$\xi_0 = \begin{cases} \log z & (\lambda = 1) \\ \frac{1}{\lambda-1} z^{\lambda-1} & (\lambda \neq 1) \end{cases}$$

となり，前者からは縮退はないが $\mathcal{F}_0(\xi_0) = \mathbb{C}\cdot 1 + \mathbb{C}\log z$ となる場がえられる。後者からは何回か生成 (or 消滅) 演算子を施こすと零となる場がえられる。以上まとめると次の定理をうる：

定理 I ： 表現(2-11)から得られる $\hat{l}_3\psi_n = \lambda_n\psi_n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)をみたす縮退のない場は次の4通りである。

$$(2\text{-}16)\quad \begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & \mathcal{F}_\lambda = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}\, z^{n+\lambda} \\ (\mathrm{II}) & \mathcal{F}^+_{n_0} = \bigoplus_{n\geq -n_0} \mathbb{C}\, z^{n} \\ (\mathrm{III}) & \mathcal{F}^-_{n_0} = \bigoplus_{n\leq n_0} \mathbb{C}\, z^{n} \\ (\mathrm{IV}) & \mathcal{F} = \mathbb{C}\cdot 1 + \mathbb{C}\log z + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \mathbb{C}\, z^{n} \end{array}$$

次に以上の各々の場の第二量子化を(2-9)に従って定める。各々について得られた波動関数を$\psi(z)$とかく。$X\in sl(2,\mathbb{C})$に対して，次の様に$\hat{X}\psi$を定める。

$$(2\text{-}17)\qquad \hat{X}\psi = \sum a_n^+ \hat{X}\psi_n + \sum a_n \hat{X}\psi_{-n}$$

これより $[\hat{X}, a_n^+]$, $[\hat{X}, a_n]$ を

$$(2\text{-}18)\qquad \hat{X}\psi = \sum\,[\hat{X}, a_n^+]\,\psi_n + \sum\,[\hat{X}, a_n]\,\psi_{-n}$$

により定める。ここで重要な注意をする。まず上のすべての場合について(2-17)が定義されるとは限らないということである。実際，(I)〜(III)では基本ベクトルξ_0が除かれているから$\hat{X}\psi$はすべての$sl(2,\mathbb{C})$の元については定義されない。さらに(2-18)により定めた演算が$sl(2,\mathbb{C})$のρ_0から導びかれた表現を与えるかどうかも分らない。これが可能であるためには少し一般なボーズ交換関係を仮定しなくてはならない。

そこで(2-9)を定義するのに交換関係

(2-19) $$[a_n, a_m^+] = c_{nm}\,\delta_{n,m}$$

を仮定する，ここで c_{nm} はスカラー($\neq 0$)とする。このとき次の定理がなりたつ:

定理 II([4]). 表現 ρ_0 の表現空間になりうるボーズ場を定める縮退のない場は(IV)型のみであり，このときボーズの交換関係は

(2-20) $$[a_n, a_m^+] = \frac{1}{n}\,\delta_{n,m}$$

に限る。

証明はJacobiの恒等式を用いてなされる。そこで量子化された場の演算子を $[a_0, a_0^+] = i$, $[a_n, a_m^+] = \delta_{n,m}$ として

(2-21) $$Q(z) = a_0 + i a_0^+ \log z + \sum_{n>0} \frac{a_n^+}{\sqrt{n}} z^n + \sum_{n>0} \frac{a_n}{\sqrt{n}} z^{-n}$$

とかくことにする。最後に頂点作用素を

(2-22) $$V(\alpha, z) = :e^{i\alpha Q(z)}:^{(+)}$$

により定めることにする。ここで : : は正規積を意味する。

(+) 正規積は a_n, a_m^+ $(n, m \in \mathbb{N})$ についてとるものとする。

(注意) 正規積を用いずに具体的にかくと

$$V(\alpha, z) = e^{i\alpha a_0 + i\alpha a_0^+ \log z}$$

(2-23)

$$\times\, e^{i\alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^+}{\sqrt{n}} z^n\right)} e^{i\alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} z^{-n}\right)}$$

となり，次節でのべるK.-P.系の頂点作用素と非常によく似た形をしていることが分かる((3-14)を参照せよ)。

§3. K.-P.系による双対共鳴模型の実現

ここでは$\mathbb{C}^*$上に自由フェルミ場を考え，双対共鳴模型をその間で相互作用するボーズ粒子とみなせることを示す。まず伊達-神保-柏原-三輪の理論(以下D.J.K.M-理論という)を思いだそう([9])。ここでは次のラグランジュ形式から出発する：

(3-1)
$$\mathcal{L} = \int_{\mathbb{C}^*} \hat{\psi}\, \bar{\partial} \psi \, dz\, d\bar{z},$$

ここで $\bar{\partial} = \partial/\partial\bar{z}$ であり ψ, $\hat{\psi}$ は複素スカラー場であり

(3-2)
$$\psi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \bar{z}^n$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{\psi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{a}_n z^{-n} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{b}_n \bar{z}^{-n}$$

によりψの共役$\hat{\psi}$を定めるものとする。このオイラー方程式の解は $\bar{\partial}\psi = 0$ より，

(3-3) $\psi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n, \quad \hat{\psi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{a}_n z^{-n}$

となることが分かる。次にこの場をフェルミ場として才二量子化する： ψ_n, ψ_n^* $(n\in\mathbb{Z})$ を $[\psi_n, \psi_m]_+ = \delta_{m,n}$ をみたすフェルミ演算子とし，

(3-4) $\psi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n z^n \qquad \psi^* = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n^* z^{-n}$

とかくことにする。次にクリフォード群を導入する：

(3-5) $V = \oplus\, \mathbb{C}\psi_n \quad , \quad V^* = \oplus\, \mathbb{C}\psi_n^*$

とおく。$\{\psi_n, \psi_n^*\}$から生成されるフェルミ代数を$\mathfrak{A}$とかく。

(3-6) $G(V, V^*) = \{ g \in \mathfrak{A} \ , \ \exists g^{-1} \ , \ gVg^{-1} \subseteq V, \ gV^*g^{-1} \subseteq V^*$

をクリフォード群という。ここで幾つか基本的な事柄をのべる。$\mathfrak{A}$の真空ベクトル$|0\rangle$を

(3-7) $\psi_n|0\rangle = 0 \quad (n<0), \quad \psi_n^*|0\rangle = 0 \quad (n>0)$

をみたし $\langle 0|1|0\rangle = 1$ となるものをとることにする。

$\{x|0\rangle\ ;\ x\in\mathfrak{A}\}$ をフォック空間という。我々の考える力学系のハミルトニアンは

$$(3-8)\qquad H(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\Lambda^n\qquad(\Lambda=\sum\psi_n\psi_{n+1}^*)$$

であり無限個の時間発展のパラメタ $x_1, x_2, \cdots, x_n\cdots$ をもっている。 $a\in\mathfrak{A}$ に対して

$$(3-9)\qquad a(x)=e^{H(x)}a\,e^{-H(x)}$$

により定める。(3-9)は

$$(3-10)\qquad \frac{\partial a(x)}{\partial x_n}=[\Lambda^n, a(x)]\qquad(n=1, 2, \cdots)$$

をみたし、K.-P. 系の解はこの積分可能条件として得られる。

以上の準備のもとでボーズ-フェルミ対応及びK.-P.系のゲージ理論をのべる。

(I) ボーズ-フェルミ対応： $\mathfrak{A}$ の元 α が n 個の生成演算子 ψ_n^* 及び m 個の消滅演算子 ψ_m の積としてあらわされているとき、α は位数が $n-m$ であるといい $\deg\alpha=n-m$ とかく。位数 N の元のなす線形空間を $\mathfrak{A}(N)$ とかく。$\mathfrak{A}(0)$ は特に重要な役割を果す。次の対応を考える：

$$(3-11)\qquad \iota:\mathfrak{A}(0)|0\rangle\longmapsto\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots]$$

を $\iota(\alpha|0\rangle) = \langle 0|\alpha(x)|0\rangle$ によって定めると1:1の対応を与える。又 $\mathfrak{a}(0)$ は積について閉じているから $\alpha \in \mathfrak{a}(0)$, $\Phi \in \mathfrak{a}(0)$ に対して $\Phi(\alpha) = \Phi\cdot\alpha$ ($\in \mathfrak{a}(0)$) が定義される。これより, $\Phi \in \mathfrak{a}(0)$ を与えて

$$(3\text{-}12) \qquad X(\Phi) : \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots] \longrightarrow \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots]$$

を $X(\Phi)\langle 0|\alpha(x)|0\rangle = \langle 0|\Phi(\alpha)(x)|0\rangle$ によって定める。これより準同型写像

$$(3\text{-}13) \qquad X : \mathfrak{a}(0) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n, \cdots])$$

が $\Phi \in \mathfrak{a}(0) \longrightarrow X(\Phi) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots])$ により定められる。この写像を具体的に書き下すことができる。このために<u>頂点作用素</u>を次の様に定める:

$$(3\text{-}14) \qquad X_{k,p}(\alpha, z) = e^{\alpha\xi(x,z)}\, e^{-\alpha\xi(\tilde{\partial}, \frac{1}{z})}$$

ここで

$$(3\text{-}15) \qquad \xi(x,z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n z^n \ , \quad \xi(\tilde{\partial}, \tfrac{1}{z}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{nz^n}\frac{\partial}{\partial x_n} ,$$

であり, $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}^*$ である。

(注意) 前節の頂点作用素(2-23)とは a_0, a_0^+ の項を無視すると, $x_n \Leftrightarrow a_n^+$ $\quad \frac{\partial}{\partial x_n} \Leftrightarrow a_n$

により同一視される。

次の作用素

$$(3\text{-}16)\qquad \mathbb{X}(z, z') = \frac{z}{z - z'}\, \mathbb{X}_{K.P}(1, z)\, \mathbb{X}_{K.P}(-1, z')$$

を考える。微分作用素 $Z_{n,m}$ を

$$(3\text{-}17)\qquad \mathbb{X}(z, z') = \sum Z_{n,m}\, z^{n} z'^{-m}$$

により定めると，

$$(3\text{-}18)\qquad \Phi(:\psi_n \psi_m^*:) = Z_{n,m}$$

となる（[9]）。さらに

$$(3\text{-}19)\qquad l t_l = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Z_{n,n+l}\ ,\quad \frac{\partial}{\partial t_l} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Z_{n,n-l}$$

がなりたつ。そこで

$$(3\text{-}20)\qquad \psi_\alpha(z) = e^{\alpha \sum_{n\in\mathbb{Z}} :\psi_n \psi_{n+l}^*: z^n} \cdot e^{-\alpha \sum_{n\in\mathbb{Z}} :\psi_n \psi_{n-l}^*: \frac{1}{n z^n}}$$

とおくと，$\psi_\alpha(z) \in G(V, V^*)$ であり，

$$(3\text{-}21)\qquad \mathbb{X}(\psi_\alpha(z)) = \mathbb{X}_{K.P}(\alpha, z)$$

となる。これをボーズ－フェルミ対応といっている。物理的にはフェルミ粒子に相互作用するボーズ粒子になるものがクリフォ

ード群の内に見いだされることを示していると理解してかまわないであろう。我々の主張はこの様な相互作用として双対共鳴模型が理解できるというものである。(3-12)及び(3-21)より，次の命題がなりたつ：

命題(3-22)

$$\langle 0|\psi_{\alpha_1}(z_1,x)\cdots\psi_{\alpha_N}(z_N,x)\,a(x)|0\rangle = X_{K.P}(\alpha_1,z_1)\cdots X_{K.P}(\alpha_N,z_N)\langle 0|a(x)|0\rangle \qquad (3\text{-}23)$$

がなりたつ，ここで $\psi_\alpha(z,x)$ は $\psi_\alpha(z)$ の(3-9)による時間発展であり $a\in\mathfrak{A}(0)$ である。

これにより，クリフォード群の元と頂点作用素(3-14)，(2-23)の間に

$$\begin{aligned}&\psi_{\alpha_1}(z_1)\cdots\psi_{\alpha_N}(z_N)\\ &\qquad\Longleftrightarrow X_{K.P}(\alpha_1,z_1)\cdots X_{K.P}(\alpha_N,z_N)\\ &\qquad\Longleftrightarrow V(\alpha_1,z_1)\cdots V(\alpha_N,z_N)\end{aligned} \qquad (3\text{-}24)$$

という対応があることが分かる。ここで次の事柄に注意する：

命題(3-25) 次の等式がなりたつ：

$$\langle\!\langle 0|V(\alpha_1,z_1)\cdots V(\alpha_N,z_N)|0\rangle\!\rangle = \prod_{i=1}^{N} z_i^{\alpha_i}$$

(3-26)
$$\times\ {}^*\langle\!\langle 0|\Sigma_{K.P}(\alpha_1,z_1)\cdots\Sigma_{K.P}(\alpha_N,z_N)|0\rangle\!\rangle^*$$

ここで，左辺の $\langle\!\langle 0|, |0\rangle\!\rangle$ は共鳴模型に対して定義されるボーズ真空であり，右辺の ${}^*\langle\!\langle 0|, |0\rangle\!\rangle^*$ はボーズ－フェルミ対応により定義されるボーズ真空である。

（注意）　この２つの真空は(3-15)の後でのべた注意にある対応　$a_n^+ \Leftrightarrow x_n$ ，$a_n \Leftrightarrow \partial/\partial x_n$ により同一視される。

（II）K.-P. 系のゲージ理論：ここではK.-P. 系を ∂ についてのスペクトル保存変形という立場で定式化し，その解の構成と解の定めるゲージ接続についてのべる。普通にやる ∂ $(=\partial/\partial x)$ の場合と何らかわる所はない。この様に定式化するのは ∂ が $\mathbb{C}^*$ 上のフェルミ場を定める演算子とみなせるからである。∂ の巾からなる擬微分作用素

(3-27)
$$W(x) = 1 + w_1(x)\partial^{-1} + w_2(x)\partial^{-2} + \cdots + \cdots$$

を考える。ここで $x=(x_1, x_2, \cdots)$ である（(3-9)を参照せよ）。この様な $W(x)$ の全体は群をなし，これを G_- とかくことにする。$L = W(x)\partial W(x)^{-1}$ のみたす次の方程式を（∂-）K.-P. 系という：

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = [(L^n)_+, L] \quad (n=1, 2, 3, \cdots), \tag{3-28}$$

ここで $(L^n)_+$ は L^n の非負巾部分をとったものである。この方程式は従来個々に知られていたソリトン方程式を一挙に導びく versal なソリトン方程式とでもよぶべきものである。まず解の構成を D.J.K.M. に沿ってのべる。彼らはクリフォード群の元 $g \in G(V, V^*)$ が与えられるとこれから解がえられることを示している。g の (3-8) による時間発展 $g(x)$ を作り,

$$w(x, k) = \Sigma_{k.P}(1.k)\langle 0|g(x)|0\rangle / \langle 0|g|0\rangle \tag{3-29}$$

とおき

$$w(x, k) = W(x)\, e^{\xi(x, k)} \tag{3-30}$$

により演算子 $W(x)$ を定めると $W \in G_-$ となり, これより $L = W\partial W^{-1}$ とおくと, (3-28) をみたす, すなわち K.-P. 系の解となる。次に K.-P. 系の解から G_- をゲージ群にもつゲージ接続がえられることを示そう。これにより, K.-P. 系は $\bar{\partial}\psi = 0$ となるフェルミ場に相互作用する粒子とみなせることが分かる。実際,

$$L = \partial - [\partial, W]W^{-1} \tag{3-31}$$

となり,

(3-32) $$\Omega(W) = [\partial, W]^{-1} d\bar{z}$$

とおくと, G_--平担なゲージ接続となる。これは $\Omega = -(L)_- d\bar{z}$ ともかけることに注意する。一般に

(3-33) $$\hat{\Omega}(W) = -\sum_{n=1}^{\infty} (L^n)_- \, dt_n$$

とおくと, $x_1 = \bar{z}$ と同一視することにより $\hat{\Omega}$ は Ω の拡張であり, これもゲージ接続になっていることが示せる([10])。以上をまとめると次の命題をうる:

命題(3-34) クリフォード群の元より, K.-P. 系の解が得られ, 又これはゲージ群を G_- にもつ平担なゲージ接続を定める。このとき, 相互作用のラグランジュ形式は

(3-35) $$\int_{\mathbb{C}^*} \hat{\psi} \, \Omega \, \psi \, dz \, d\bar{z}$$

とあらわされる。

以上の(I), (II)の議論をまとめると次の定理がえられる。

定理 III. クリフォード群の元 $\psi_{\alpha_1}(z_1) \cdots \psi_{\alpha_N}(z_N)$ ((3-24), (3-20)を見よ)に対してボーズ-フェルミ対応により頂点作用素

$X_{K.P}(\alpha_1, z_1) X_{K.P}(\alpha_2, z_2) \cdots X_{K.P}(\alpha_N, z_N)$ を対応させこの真空期待値をとるとKoba-Nilsenの式の被積分関数がえられる。又同じ元の(3-9)による時間発展をとるとこれよりK.-P.系の解がえられ, G をゲージ群とするゲージ接続がえられ, フェルミ場の相互作用を与える。

以上により, 双対共鳴模型の散乱振幅を与えるKoba-Nilsenの式とK.-P.系の特殊解との間の関係が明らかになった。以上の対応(ボーズ-フェルミ対応)によりK.-P.系の解として双対共鳴模型が実現されていると考えてよいであろう。

引 用 文 献

[1] Veneziano, G., Nuovo Cimento 57A (1968) 190,

[2] Koba, Z. & Nilsen, H.B., Nuclear Phys. B10 (1969) 633,

[3] Nambu, Y., Proc. Intern. Conf. on Symmetries and Quark Models, Wayne Univ. 1969 (Gordon and Breach, 1970), 269.

[4] Fubini, S. and Veneziano, G., Nuovo Ciemento 67A (1970) 29,

[5] Scherk, J., An introduction to the theory of

dual models and strings, Reviews of Modern Physics, 47 (1975) 123,

[6] Schwarz, J.H., Dual Resonance Theory, Physics Reports, 8 no 4 (1973) 269,

[7] Kawamoto, N., Namikawa., Y., Tschiya, A. and Yamada, Y., Commun. Math. Phys. 116 (1988) 247,

[8] 素粒子論(岩波講座・現代物理学の基礎 10) (1978),

[9] Date, E., Jimbo, M., Kashiwara, M. & Miwa, T., Transformation groups for soliton equations, Proc. of RIMS Symposium on non-linear integrable systems – classical theory and quantum theory, 34–120, Singapore, World Scientific (1983)

[10] Kanemaki, S., Królikowski, W. and Suzuki, O., A gauge theory for Kadomtsev-Petviashivili system, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., 22 (1986) 1119–1128.